Fonction lipschitzienne

Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Une fonction f est k-lipschitzienne sur $X \subset \mathbb{R}$ si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Limite en $a \in \mathbb{R}$

Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \bar{D}, a \in \mathbb{R}$.

– f tend vers $l \in \mathbb{R}$ en a si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

– f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Limite en $+\infty$

Si $+\infty \in \bar{D}$,

– f tend vers $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

– f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Convexité

La fonction f est convexe sur I si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Continuité uniforme

La fonction f est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathcal{D}_f, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$