Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soient a, b des fonctions continues de $I \to K$. Soient $x_0 \in I$ et A une primitive sur I de a. Les solutions sur I de l'équaion $y' = a(x)y + b(x)$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\mathrm{d}t, \quad \lambda \in K.$$

Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

On considère l'équation

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(t),$$

où $a, b, c \in K, a \neq 0, f$ une fonction somme de fonctions du type $x \mapsto e^{sx}P(x)$, avec $s \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.
Solutions de l'équation homogène (E_0)

- Si le polynôme caractéristique P_c admet deux racines distinctes r_1 et r_2, les solutions de (E_0) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad \lambda, \mu \in K.$$

  ou si ses racines sont $\alpha \pm \beta$, les solutions de (E_0) sont les fonctions

$$x \mapsto (\lambda \cosh(\beta x) + \mu \sinh(\beta x))e^{\alpha x}, \quad \lambda, \mu \in K.$$

- Si P_c admet une racine double r, les solutions de (E_0) sont les fonctions

$$x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}, \quad \lambda, \mu \in K.$$

- Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et P_c admet deux racines complexes $\alpha \pm i\beta$, les solutions **réelles** de (E_0) sont les fonctions

$$x \mapsto (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))e^{\alpha x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto e^{sx}Q(x)$ où Q est un polynôme tel que

- Si $P_c(s) \neq 0, \deg(Q) = \deg(P)$.
- Si s est une racine simple de $P_c, \deg(Q) = \deg(P) + 1$ et le coefficient de Q devant X^0 est nul.
- Si s est une racine double de $P_c, \deg(Q) = \deg(P) + 2$ et les coefficients de Q devant X et X^0 sont nuls.

Équations de suites

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

- Si le polynôme caractéristique P admet deux racines distinces r_1 et r_2, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = xr_1^n + yr_2^n.$$

- Si P admet une racine double r, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (x + yn)r^n.$$

- Si P admet deux racines complexes conjuguées $re^{\pm i\theta}, r \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(x \cos(n\theta) + y \sin(n\theta)).$$

Somme des termes d'une suite

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{0 \leq p \leq n} u_p = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q de $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{p=m}^{p=n} u_p = \begin{cases} \frac{u_m - u_{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1; \\ (n - m + 1)u_0 & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$