Électromagnétisme

Analyse vectorielle

Circulation le long de Γ : $C = \int_\Gamma \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$
Flux à travers Σ : $\phi = \int_\Sigma \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$
Définition du gradient : $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \mathrm{d}\vec{r}$
En coordonnées cartésiennes :
$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$
En coordonnées cylindro-polaires :
$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$
En coordonnées sphériques :
$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$
Attention, l'angle θ n'est pas le même en coordonnées sphériques qu'en coordonnées cylindro-polaires.
Nabla $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$
$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \nabla f \quad \text{div}\, A = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
Laplacien scalaire $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$
Laplacien vectoriel :
$\vec{\Delta} A = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$
$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}) = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) = \vec{0}$
$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f)$
$\vec{\Delta}\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\, \vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A})$
Théorème de Stokes : pour une surface orientée S de bord Γ, $\oint_\Gamma \vec{A}\mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$
Théorème d'Ostrogradski : pour un volume V de surface S, $\iint_S \vec{A}\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \text{div}\, \vec{A}\mathrm{d}V$

Électrostatique

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$
$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$
Si Γ va de A à B, $\int_\Gamma \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = V(A) - V(B)$
Théorème de Gauss : si S est une surface fermée, $\iint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

Dipôle électrostatique

Moment dipolaire $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OM_i}$
Potentiel en fonction d'un moment dipolaire $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Moment exercé sur un dipôle dans un champ électrique uniforme $\vec{m} = \vec{p} \wedge \vec{E}$
Énergie potentielle du dipôle plongé dans E $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Conducteurs

Densité de courant $\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$
Intensité à travers S : $I = \int_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{S}$
Élement de courant en $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}$:
$\mathrm{d}\mathcal{C} = I\mathrm{d}l = \vec{j}_s \mathrm{d}S = \vec{j}\mathrm{d}\tau$
Conductivité γ : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$
Conductance $G = \frac{1}{R} = \gamma\frac{S}{\ell}$

Magnétostatique

Loi de Biot et Savart
$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\mathrm{d}\mathcal{C}(P) \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$
Champ magnétique sur l'axe d'une bobine $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\vec{e}_z$.
Théorème d'Ampère $\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{enlacé}$
Le champ magnétique est à flux conservatif.

Équations de Maxwell

$\text{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ Maxwell-Gauss
$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Maxwell-Faraday
$\text{div}\, \vec{B} = 0$ Maxwell-flux
$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ Maxwell-Ampère

Conservation de la charge $\text{div}\, \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
Force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
Potentiels retardés $\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right)}{PM}\mathrm{d}\tau$
Énergie électromagnétique :
Puissance volumique $\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E}$
Vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

Énergie volumique électromagnétique
$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$
$\mathrm{div}\,\vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\mathcal{P}$
Relations de passage :
$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$
$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2}$

Induction

Champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
Force électromotrice
$e_{A\to B} = \int_{A\to B} \vec{E}_m \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$
La dernière égalité est la loi de Faraday.

M est la mutuelle inductance.
Énergie magnétique stockée par l'ensemble de deux circuits $E_{mag} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$

Dipôle magnétique

Moment magnétique d'un circuit filiforme parcouru par i, orienté par le vecteur surface $\vec{S}$: $\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S}$
Potentiel créé par le dipôle $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$
Action d'un champ magnétique uniforme sur un dipôle magnétique $\vec{m} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$
Énergie potentielle d'interaction d'un dipôle avec un champ magnétique $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$