1 Élements de base du calcul des probabilités

Un triplet de probabilité est $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ avec :
Ω : ensemble des résultats d'expérience
$\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\Omega)$: ensemble des événements
P : application probabilité de $\mathcal{C}$ dans $[0,1]$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

Tirage avec remise dans une urne à deux catégories :
$P(k \text{ succès sur } n) = \binom{n}{k} P_s^k (1-P_s)^{n-k}$

Probabilités conditionnelles :
$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Théorème des probabilités totales : pour tout système complet d'événements $\{A_i\}$, $P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$

Formule de Bayes :
$P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

2 Variables aléatoires réelles

Variable aléatoire réelle :
$(\Omega, \mathcal{C}, P)$: triplet de probabilité, $(\Omega', \mathcal{C}')$: espace probabilisable avec $\Omega' \subset \mathbb{R}$. Une variable aléatoire réelle est une application mesurable de Ω dans Ω' : $\forall B \in \mathcal{C}', X^{-1}(B) \in \mathcal{C}$.

Fonction de répartition :
$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P[X < x] \end{array}$$

Espérance :
$$E(\alpha(X)) = \begin{cases} \text{cas discret :} & \sum_{i \in I} \alpha(x_i) p_i \\ \text{cas continu :} & \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u) \mathrm{d}u \\ \text{cas mixte :} & \text{somme des deux} \end{cases}$$
L'espérance est linéaire.

Variance :
$\mathrm{var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$
$\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \mathrm{var}(X)$
Écart type : $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}}$

Fonction caractéristique :
$\phi_X(t) = E(e^{itX})$
$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} p(u) \mathrm{d}u$ est la transformée de Fourier de p.

Changements de variables :
$P[Y = y_i] = \sum_{i | y_j = g(x_i)} P[X = x_i]$
Théorème :
$\Omega_X, \Omega_Y \subset \mathbb{R}$ ouverts, X : VA continue à valeurs dans Ω_X, $g : \Omega_X \longrightarrow \Omega_Y$ difféomorphisme.
$Y = g(X)$ est une VA continue de densité $p_y(y) = p_x(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \right|$ avec $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ Jacobien de g.

3 Couples de variables aléatoires réelles

Couple de VA réelles :
$(\Omega, \mathcal{C}, P)$: espace probabilisé, $(\Omega', \mathcal{C}')$: espace probabilisable avec $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}'$ construit à partir de réunions ou intersections finies ou dénombrables de pavés de $\mathbb{R}^2$.
Un couple de VA réelles est une application mesurable de Ω dans Ω'.

Fonction de répartition :
$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & P[X < x, Y < y] \end{array}$$

Propriété :
X, Y : VA, $\alpha, \beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: application continues. Alors $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ sont des VA indépendantes. Réciproque vraie si α et β sont bijectives.

Espérance :
$E(\alpha(X, Y)) =$
$$\begin{cases} \text{si } X \text{ et } Y \text{ VA discrètes :} & \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha(x_i, y_j) p_{ij} \\ \text{si } X \text{ et } Y \text{ VA continues :} & \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u, v) p(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \end{cases}$$
Moments centrés et non centrés :
$m_{ij} = E(X^i Y^j), i, j \in \mathbb{N}$

$\mu_{ij} = E((X - E(X))^i (Y - E(Y))^j), i, j \in \mathbb{N}$

Covariance et matrice de covariance :
$\text{cov}(X,Y) = \mu_{11} = E(XY) - E(X)E(Y)$
$E[\mathbf{V}\mathbf{V}^T] = \begin{pmatrix} \text{var}(X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(X,Y) & \text{var}(Y) \end{pmatrix}$,
$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} X - E(X) \\ Y - E(Y) \end{pmatrix}$

Fonction caractéristique :
$\phi_{X,Y}(u_1, u_2) = E(\exp(i\mathbf{u}^T\mathbf{W}))$,
$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^T, \mathbf{W} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Coefficient de corrélation :
$r(X,Y) = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Espérance conditionnelle :
$E(\alpha(X,Y)) = E_X(E_Y(\alpha(X,Y)|X))$

Changements de VA continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: Loi de $U = g(X,Y)$? On introduit une VA intermédiaire $V = h(X,Y)$ (ex : X). On cherche la loi du couple (U,V) puis la loi marginale de U. Ou calcul de la fonction de répartition de U. Ou, si X et Y sont indépendantes, fonction caractéristique de U.

4 Vecteurs Gaussiens

Vecteur gaussien :
$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ suit une loi normale à n dimensions si
$p(\mathbf{x}) = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right)}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Sigma)}}$,
$\mathbf{x}, \mathbf{m} \in \mathbb{R}^n, \Sigma \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ définie positive.

Fonction génératrice des moments :
$\theta(\mathbf{u}) = E(e^{\mathbf{u}^T\mathbf{X}})$

Loi du χ^2 :
$(X_i)_{i\in\{1..n\}}$: n VA indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$.

Loi de Student :
$X \sim \mathcal{N}(0,1), Y \sim \chi_n^2, X$ et Y indépendantes.
$Z = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_n$.

Loi de Fischer :
$X \sim \chi_n^2, Y \sim \chi_m^2, X$ et Y indépendantes.
$Z = \dfrac{X/n}{Y/m} \sim f_{n,m}$.

5 Convergence et théorèmes limites

Convergence en loi : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow$ la suite des fonctions $F_n(x) = P[X_n < x]$ converge simplement vers $F(x) = P[X < x]$ en tout point où F est continue.

Théorème de Lévy : X_n converge en loi vers $X \Leftrightarrow \phi$ continue en $t = 0$ et
$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_n(t) = E(e^{itX_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(t) = E(e^{itX})$.

Convergence en probabilité : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{P}} X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, P[|X_n - X| > \epsilon] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Convergence en moyenne quadratique : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{MQ}} X \Leftrightarrow E((X_n - X)^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Convergence presque sûre : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{PS}} X \Leftrightarrow \forall \omega \in A, P(A) = 1 \Rightarrow X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)$.

Loi faible des grands nombres :
$(X_i)_{i\in\{1..n\}}$: VA indépendantes de même loi de moyenne $E(X_k) = m < \infty$.
$\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{P}} m$.

Loi forte des grands nombres :
$(X_i)_{i\in\{1..n\}}$: VA indépendantes de même loi de moyenne $E(X_k) = m < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$.
$\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{MQ}} m$.

Théorème de la limite centrale :
$(X_i)_{i\in\{1..n\}}$: VA indépendantes de même loi de moyenne $E(X_k) = m < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$.
La VA centrée réduite vérifie :
$Y_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.